ANALYSE

DURÉE : 4 heures. — COEFFICIENT : 2

PREMIER PROBLÈME

f désigne une fonction numérique d'une variable réelle :

$$f : \forall t \in \mathbf{R} \to f(t) \in \mathbf{R}$$

continue, dérivable et pourvue de dérivées de tous ordres continues sur **R, h est un nombre réel non nul; n est un entier naturel.**

1° On considère la suite de fonctions $\varphi_n(t)$ définies par :

$$\varphi_0(t) = f(t) \qquad \varphi_n(t) = \frac{\varphi_{n-1}(t+h) - \varphi_{n-1}(t)}{h}$$

a. k étant un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, expliciter $\varphi_n(t)$ à l'aide de h, de n, des quantités $f(t + kh)$ et des coefficients C_n^k du binôme de Newton.

b. Démontrer par récurrence l'existence d'un nombre θ_n appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ tel que :

$$\varphi_n(t) = f^{(n)}(t + n\theta_n h)$$

$f^{(n)}(t)$ désignant la dérivée d'ordre n de $f(t)$.

2° *a.* En déduire après un changement de notation que :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{n-k} C_n^k f(kx)}{x^n} \right) = f^{(n)}(0)$$

b. Appliquer ce résultat à la recherche des limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{3 \operatorname{Arc\,tg} x - 3 \operatorname{Arc\,tg} 2x + \operatorname{Arc\,tg} 3x}{x^3}$$

$$\lim_{X \to \infty} \left[\frac{X(X+2)}{(X+1)^2} \right]^{X^2}$$

c. Retrouver chacune de ces deux limites par une autre méthode.

3° On choisit $f(t) = t^p$, p étant un entier naturel.

a. q étant également un entier naturel, déduire de la première question après un changement de notation, que :

$$\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{n-k} C_n^k (q+k)^p = 0 \qquad \text{si} \qquad n > p$$

b. D est le déterminant d'ordre $n + 1$ dont l'élément de la i^{eme} ligne et de la j^{eme} colonne est :

$$a_j^i = (i+j)^p \qquad 1 \leqslant i \leqslant n+1, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n+1$$

Calculer D pour $n > p$.

DEUXIÈME PROBLÈME

1° Soit $\mathfrak{A}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, à éléments réels; a_j^i désigne l'élément de la i^{eme} ligne et de la j^{eme} colonne de la matrice A appartenant à $\mathfrak{A}$. [0] désigne la matrice de $\mathfrak{A}$ dont tous les éléments sont égaux à 0.

Soit $N(A) = \sup_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} |a_j^i|$ la plus grande des valeurs absolues de tous les éléments de la matrice A.

a. Montrer que :

$N(A) = 0 \Rightarrow A = [0]$.

$\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $N(\lambda A) = |\lambda| N(A)$.

$\forall (A, B) \in \mathfrak{A}^2$, $N(A + B) \leqslant N(A) + N(B)$, donner un exemple d'égalité des deux membres.

b. Montrer que :

$$\forall (A, B) \in \mathfrak{A}^2, \quad N(AB) \leqslant nN(A)N(B)$$

p désignant un entier naturel et A^p la puissance p^{eme} de la matrice A, montrer que $N(A^p) \leqslant n^p [N(A)]^p$, donner un exemple d'égalité des deux membres.

c. On suppose que les éléments de la matrice A sont des fonctions d'une variable p (p entier naturel).

Par définition, on dira que A converge vers [0] si et seulement si tous les éléments de A ont pour limite 0 lorsque p tend vers l'infini.

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que A converge vers [0] est : $\lim_{p \to \infty} N(A) = 0$.

Les éléments de A étant fixés, ceux de A^p sont des fonctions de p. Montrer qu'une condition suffisante pour que A^p converge vers [0] est : $N(A) < \frac{1}{n}$.

2° k est un entier naturel tel que : $0 \leqslant k \leqslant n - 1$.

Soit $M_k \in \mathfrak{Ab}$ la matrice carrée d'ordre n définie par :

$$a_j^i = 1 \text{ si } j - i = k \qquad \text{et} \qquad a_j^i = 0 \text{ si non.}$$

a. Montrer que : $M_k M_{k'} = M_{k+k'}$ si $k + k' \leqslant n - 1$, donner la valeur de ce produit si $k + k' \geqslant n$.

b. **Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des matrices**

$$X = \sum_{k=0}^{k=n-1} x_k M_k ,$$

$(x_0 , x_1 , \ldots , x_{n-1})$ désignant un élément quelconque de $\mathbf{R}^n$.

Montrer que $\mathfrak{M}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{Ab}$: quelle est sa dimension?

Montrer que $\mathfrak{M}$ est un sous-anneau de $\mathfrak{Ab}$: est-il intègre?

Quels sont les éléments inversibles de $\mathfrak{M}$?

c. On envisage en particulier les matrices de $\mathfrak{M}$ de la forme :

$$X = x_0 M_0 + x_1 M_1$$

Calculer X^p et $N(X)$.

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que X^p converge vers [0] est $|x_0| < 1$.

Y a-t-il contradiction avec 1°*c*? Montrer qu'en fait la condition suffisante énoncée à la fin de 1°*c* n'est jamais nécessaire pour une matrice de $\mathfrak{M}$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail